

Quelle que
soit la distance
 $\varepsilon > 0$

Il existe un
rang N tel que
pour n plus grand
que N

La distance entre
 x_n et l est plus
petite que ε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$$

si n est suffisamment
proche de $+\infty$

§4.2 Limites de fonctions

Définition 4.9 (défini au voisinage & limite de fonction)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) On dit que f est définie au voisinage de x_0

si $\exists \delta > 0$ tq $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \subseteq D$.



f est bien définie un peu à gauche et un
un peu à droite de x_0

(ii) Supposons que f est définie au voisinage de x_0 et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que l est la limite quand x tend vers x_0 de f ou l est la limite de f en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

quel que soit la distance $\varepsilon > 0$ si x est suffisamment proche de x_0 , la distance entre l & $f(x)$ $\leq \varepsilon$.

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

(iii) Supposons que f est définie au voisinage de x_0 .

On dit que f admet une limite en x_0 si $\exists l \in \mathbb{R}$

tq $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, i.e. $\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Remarques 4.10

(i) On n'a pas besoin que $f(x_0)$ soit défini pour que la limite quand x tend vers x_0 de f ait un sens. Si f est définie en x_0 , la limite l n'est pas nécessairement $f(x_0)$.

(ii) Une façon équivalente d'écrire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ est $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x$ tq $0 < |x - x_0| < \delta$,
on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.
En effet,

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} = \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Exemples 4.1-1

(ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

RdP:

Option 1: étude de fonctions.

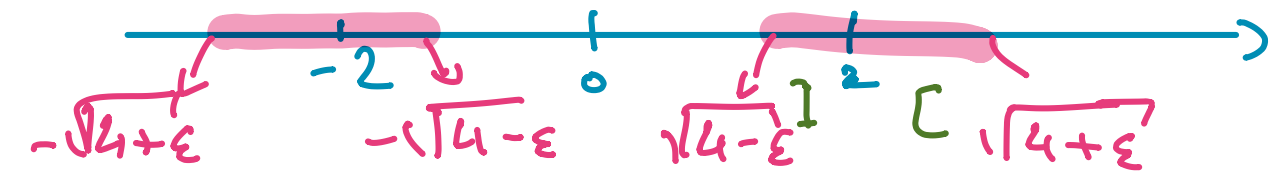
$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad : \quad |x^2 - 4| \leq \varepsilon. \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2 - 4 \leq \varepsilon \\ x^2 - 4 \geq -\varepsilon \end{array}$$

$$\text{On résout : } x^2 - 4 \leq \varepsilon \Leftrightarrow x^2 - 4 - \varepsilon \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - (4 + \varepsilon) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{4 + \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}]$$

$$x^2 - 4 \geq -\varepsilon \Leftrightarrow x^2 - (4 - \varepsilon) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{4 - \varepsilon}] \cup [\sqrt{4 - \varepsilon}, +\infty[$$

$$x \in [-\sqrt{4 + \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}] \cap (]-\infty, -\sqrt{4 - \varepsilon}] \cup [\sqrt{4 - \varepsilon}, +\infty[)$$



$$\delta = \min(2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2) > 0$$

Opération 2 :

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$|x^2 - 4| \leq \varepsilon$$

$$\hookrightarrow |x^2 - 4| = |(x-2+2)^2 - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2) + 4 - 4|$$

$$\leq \underbrace{|x-2|^2}_{\leq \delta^2} + 4 \underbrace{|x-2|}_{\leq \delta} \leq \delta^2 + 4\delta, \quad \rightarrow \text{expression qui ne dépend plus de } x, \text{ mais de } \delta \text{ ty en } \delta=0, \delta^2 + 4\delta = 0.$$

$$\delta^2 + 4\delta = \varepsilon$$

$$\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$$

$$\delta = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4\varepsilon}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 + \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -2 + \sqrt{4 + \varepsilon} \\ -2 - \sqrt{4 + \varepsilon} \end{cases} \rightarrow \text{on rejette, on a besoin } \delta > 0. \end{aligned}$$

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon} > 0$

Soit $x \in]2 - \delta, 2 + \delta[\setminus \{2\}$ quelconque. Alors, on a $|x - 2| < \delta$. Et donc,

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |(x - 2 + 2)^2 - 4| = |(x - 2)^2 + 4(x - 2)| \\ &\leq |x - 2|^2 + 4|x - 2| \leq \delta^2 + 4\delta = (-2 + \sqrt{4 + \varepsilon})^2 + 4(-2 + \sqrt{4 + \varepsilon}) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

ε étant quelconque, on a le résultat.

(iii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 14 & \text{si } x \neq 0 \\ 58 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 14$ (malgré le fait que $f(0) = 58 \neq 14$)

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. posons $\delta = 5 > 0$. Soit x tq $0 < |x - 0| < \delta$. Alors, $|x| > 0$ et donc, $x \neq 0$.

Ainsi, $|f(x) - 14| = |14 - 14| = 0 < \varepsilon$.

Proposition 4.12 (Unicité de la limite)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 .
Si f admet une limite en x_0 , cette limite est unique.

Théorème 4.13 (Caractérisation des limites de fonctions par les suites)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0, l \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 .

Alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \geq 1}$, tq $\forall n, a_n \in D \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$,

on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

Remarque 4.14 : Résultat utile pour avoir que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas

On trouve (a_n) & (b_n) comme dans l'énoncé tq

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Exemple 4.15 :

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Sient $\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{2n\pi} \neq 0$ ($\neq 0$ assure que $a_n, b_n \in D \setminus \{0\}$)

$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\text{De plus, } f(a_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \rightarrow 0$$

$$f(b_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas

Proposition 4.17 (prop. alg.)

Soient $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0, a, b \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$
définies au voisinage de x_0 et tq

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b. \quad \text{Alors,}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b.$$

$$(iii) \text{ si } b \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

$$(iv) \text{ si } \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \quad f(x) = g(x), \text{ alors, } a = b$$

$$(v) \quad \text{si } \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \quad f(x) \leq g(x), \text{ alors, } a \leq b.$$

⚠ sans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$
c'est faux.

Théorème 4.18 (entre les deux gendarmes pour les fonctions)

Soient $x_0, l \in \mathbb{R}$, $D, E, F \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $h: F \rightarrow \mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0 tq

$$(i) \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

Alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

Corollaire 4.19

Soient $x_0, l \in \mathbb{R}$, $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0 tq

$$(i) \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \quad |f(x) - l| \leq g(x)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$

Example 4.20

(i) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)$.

$$|\sin(x)| \leq 1$$

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

Par la proposition 0.51, on a pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
 $|\sin(x) - 0| \leq |x|$

Vu que $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, on a par le corollaire du
critère des deux gendarmes que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)$.

On a $1 - \cos(x) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Par le point précédent et
les propriétés algébriques:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - (1 - \cos(x))) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) \\ = 1 - 0 = 1.$$

(iii) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

Par la proposition 0.51, on a $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$,
 $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1$

Par le théorème des deux gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Définition 4.21

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 . Alors, on dit que

(i) f tend vers l'infini quand x tend vers x_0 si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \quad f(x) \geq M.$$